Análise de wavelets

Mohamed Lemine Ould Sid Ahmed
Orientadora: Dra. Thelma Sáfadi

Universidade Federal de Lavras - Dep. de Estatística

Lavras, 21 de Julho de 2017

Sinais

- Informação existe em forma de fatos, ou dados, e quando esses são combinados ao longo do tempo formam um sinal.

Sinais

- Informação existe em forma de fatos, ou dados, e quando esses são combinados ao longo do tempo formam um sinal.

- Exemplos: preços de ações na bolsa de valores, séries de precipitação, leitura de sensores...

Sinais

- Informação existe em forma de fatos, ou dados, e quando esses são combinados ao longo do tempo formam um sinal.

- Exemplos: preços de ações na bolsa de valores, séries de precipitação, leitura de sensores...

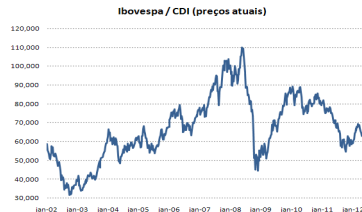
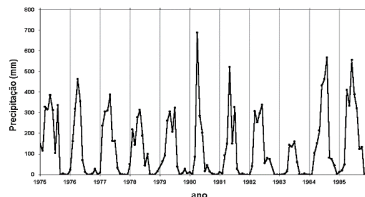



Figura 1: Exemplos de sinais

Métodos de processamento de sinais

Os métodos mais importantes de processamento de Sinais são:

Métodos de processamento de sinais

Os métodos mais importantes de processamento de Sinais são:

1. Análise de Fourier

Métodos de processamento de sinais

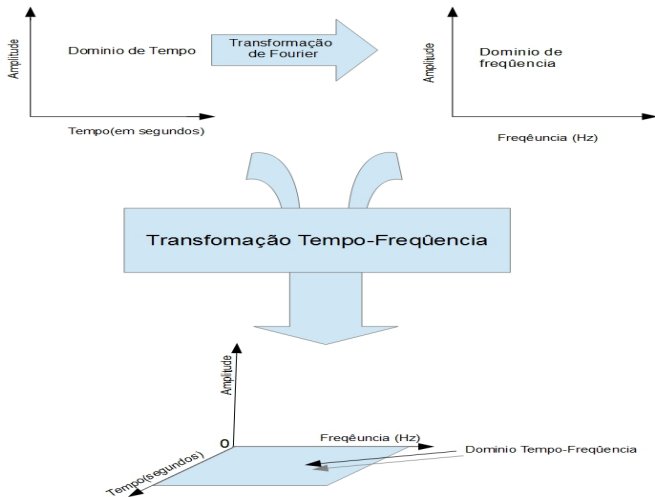
Os métodos mais importantes de processamento de Sinais são:

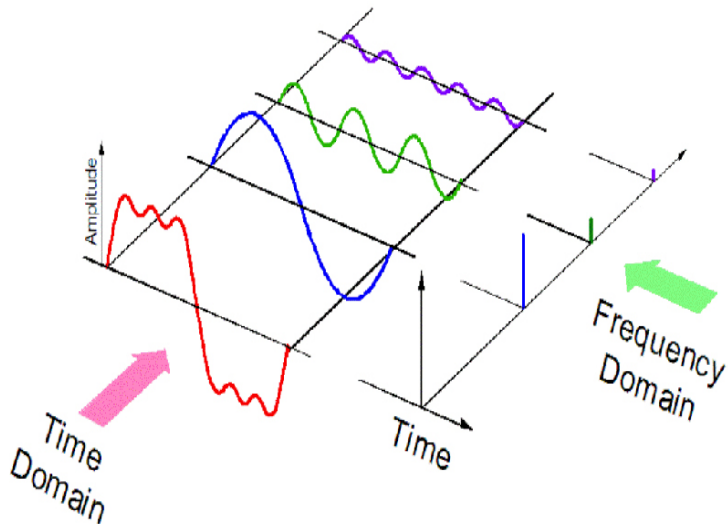
1. Análise de Fourier
2. Análise de Wavelet

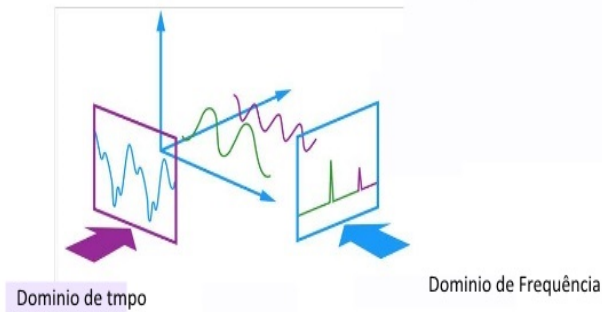
Representação de sinais

Sinais podem ser representadas nos seguintes domínios

Representação de sinais

Sinais podem ser representadas nos seguintes domínios

Utilidade

A transformação de Fourier decompõe uma sinal (função) em frequências que constituem o mesmo sinal.

Limitação

Uma limitação de transformação de Fourier: A não localização no tempo.

Transformada de Gabor

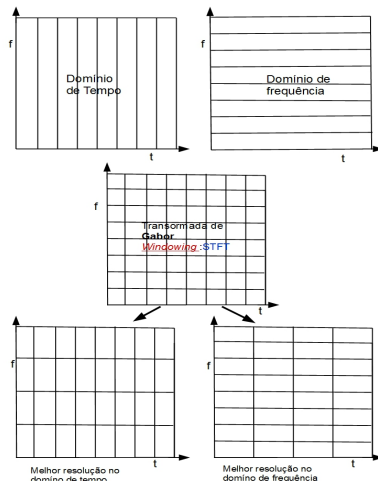



Figura 2: Transformada de Fourier de tempo curto (Short Time Fourier Transform STFT), ou Transformada de Gabor (Denis Gabor, 1946)

Transformação de Wavelet

A transformação de wavelet é uma ferramenta flexível para representar um sinal no domínio de ”Tempo vs Frequência”e para superar a deficiência do STFT.

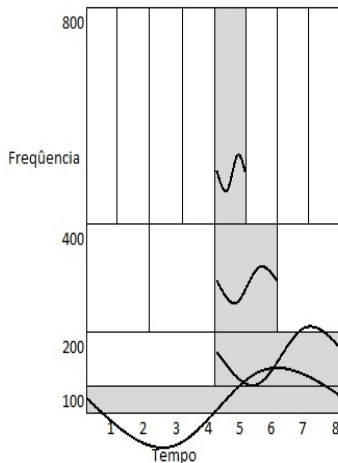
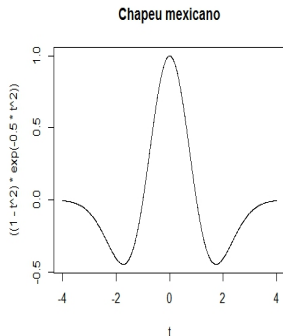
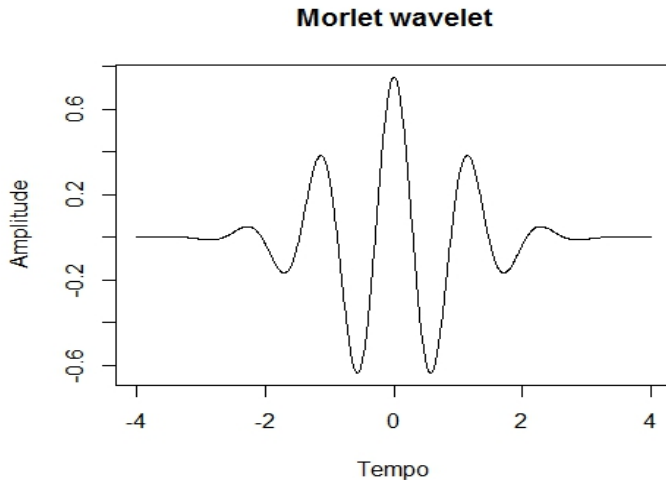



Figura 3: Transformação Wavelet

Definição

- Wavelet é uma função que tem formato de onda, de duração efetivamente limitada (cresce e decai rapidamente) e que tem média zero.
- Uma função wavelet muito conhecida é $\psi(t) = (1 - t)e^{-t^2}$, a segunda derivada da gaussiana (Mexican hat).

Morlet wavelet

Propriedades de wavelet

- Localização no tempo

Propriedades de wavelet

- Localização no tempo
- deslocamento no tempo

Propriedades de wavelet

- Localização no tempo
- deslocamento no tempo
- flexibilidade

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

- Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

- Transformada de Fourier

$$F(w) = \int f(t) e^{-iwt} dt \qquad (1)$$

Transformada de Fourier

- Transformada de Fourier

$$F(w) = \int f(t)e^{-iwt}dt \quad (1)$$

- i.é, a soma sobre tudo o intervalo de tempo do sinal $f(t)$ multiplicado por um exponencial complexo, e o resultado é ”coeficientes de Fourier $F(.)$”

Transformada de Fourier

- Transformada de Fourier

$$F(w) = \int f(t)e^{-iwt}dt \quad (1)$$

- i.é, a soma sobre tudo o intervalo de tempo do sinal $f(t)$ multiplicado por um exponencial complexo, e o resultado é "coeficientes de Fourier $F(.)$"
- A multiplicação destes coeficientes pelas frequência correta produz a componente senoidal constituinte do sinal original.

TCW

Analogamente,

TCW

Analogamente,

- O resultado da transformação contínua de wavelet é ”coeficientes de wavelet”.

TCW

Analogamente,

- O resultado da transformação contínua de wavelet é ”coeficientes de wavelet”.

- A multiplicação de cada coeficiente pela função wavelet adequada, de **escala** e **deslocamento** adequados, produz as componentes de wavelet que constituem o sinal original.

Coefiente de escala

Escala: Esticar ou encolher o sinal.

Coefiente de escala

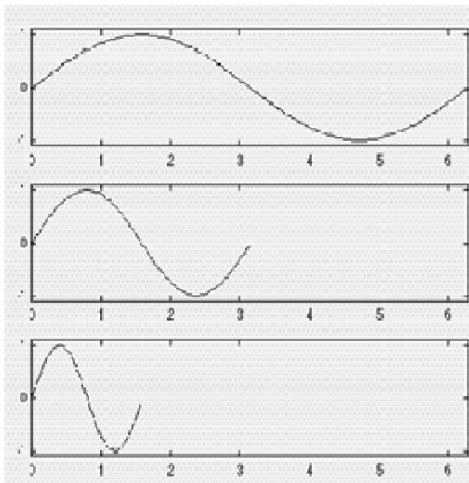
Escala: Esticar ou encolher o sinal.
Fator de escala (a)

Coefiente de escala

Escala: Esticar ou encolher o sinal.
Fator de escala (a) $\rightarrow f(t) = \operatorname{sen}(t/a)$

Coefiente de escala

Escala: Esticar ou encolher o sinal.

Fator de escala (a) $\rightarrow f(t) = \text{sen}(t/a)$

f(t)= sen(t); a=1

f(t)=sen(2t);a=1/2

f(t)=sen(4t) ;a=1/4

Coefiente de escala

Fator de escala para wavelet funciona do mesmo jeito

Coefiente de escala

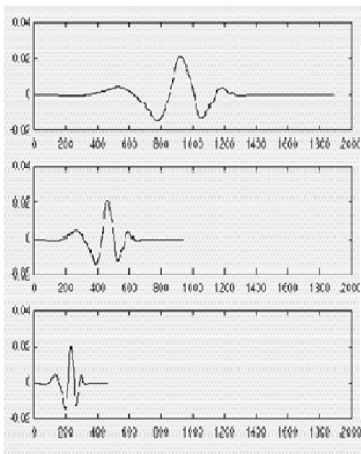
Fator de escala para wavelet funciona do mesmo jeito
Fator de escala (a)

Coefiente de escala

Fator de escala para wavelet funciona do mesmo jeito

Fator de escala (a) $\rightarrow f(t) = \Psi(t/a)$

Coefiente de escala

Fator de escala para wavelet funciona do mesmo jeito
Fator de escala (a) $\rightarrow f(t) = \Psi(t/a)$

Função wavelet

A função wavelet contínua:

Função wavelet

A função wavelet contínua:

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Função wavelet

A função wavelet contínua:

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

a: parâmetro de escala

Função wavelet

A função wavelet contínua:

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

a: parâmetro de escala

b: parâmentro de deslocamento

Função wavelet

A função wavelet contínua:

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

a: parâmetro de escala
b: parâmentro de deslocamento

Assim, a Transformação de Wavelet Contínua (TWC) é a soma, sobre todo o domínio de tempo, do sinal multiplicado por verções escalonadas e deslocadas da função **wavelet mãe**.

Função wavelet

A função wavelet contínua:

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

a: parâmetro de escala
b: parâmentro de deslocamento

Assim, a Transformação de Wavelet Contínua (TWC) é a soma, sobre todo o domínio de tempo, do sinal multiplicado por verções escalonadas e deslocadas da função **wavelet mãe**.

Como isso é feito?

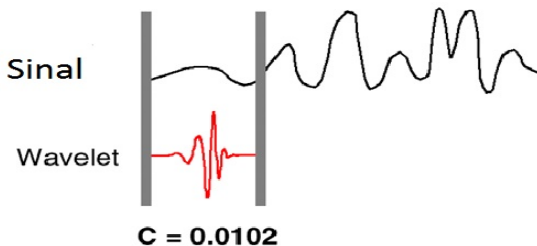
Passos 1 e 2

Passo1: Tomar uma função wavelet e comparar a sua curva com um setor do sinal começando do início deste sinal.

Passos 1 e 2

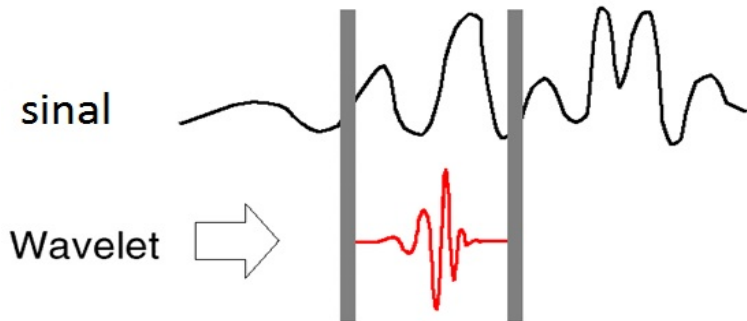
Passo1: Tomar uma função wavelet e comparar a sua curva com um setor do sinal começando do início deste sinal.
Passo2: Calcular a correlação, C, entre a wavelet e o setor determinado em passo1. (C é a medida de semelhança).

Passos 1 e 2

Passo1: Tomar uma função wavelet e comparar a sua curva com um setor do sinal começando do início deste sinal.
Passo2: Calcular a correlação, C, entre a wavelet e o setor determinado em passo1. (C é a medida de semelhança).

Passo 3

Passo3: Deslocar a wavelet a direita e repetir os passos 1 e 2.

Passo 3

Passo3: Deslocar a wavelet a direita e repetir os passos 1 e 2.

Passo 4

Paso4:Esticar (dilatar) a wavelet e repetir os passos 1 a 3.

Passo 4

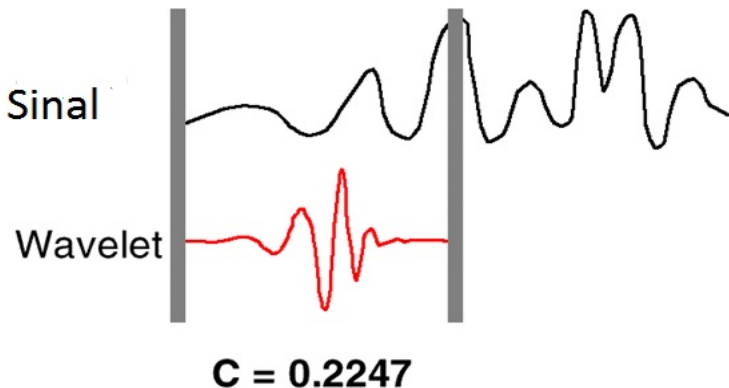
Paso4:Esticar (dilatar) a wavelet e repetir os passos 1 a 3.

Análise de mulitiresolução

- É possível analisar qualquer sinal usando MRA

Análise de mulitiresolução

- É possível analisar qualquer sinal usando MRA
- Adequada para análise de sinais não estacionários.

Análise de mulitiresolução

- É possível analisar qualquer sinal usando MRA
- Adequada para análise de sinais não estacionários.
- Análise de multiresolução (Multiresolution analysis, Multiscale analysis) é o método de construção de quase todas as bases de DWT e a justificativa para o FWT (Fast Wavelet Transform).

Ligação com CWT

- Justificativa:

Ligação com CWT

- Justificativa:
  1. Dificuldade e custo computacional de calcular os coeficientes de wavelet contínua em todos os possívies escalas

Ligação com CWT

- Justificativa:
  1. Dificuldade e custo computacional de calcular os coeficientes de wavelet contínua em todos os possívies escalas
  2. A quantidade enorme de dados gerados por esse processo.

Ligação com CWT

- Justificativa:
  1. Dificuldade e custo computacional de calcular os coeficientes de wavelet contínua em todos os possívies escalas
  2. A quantidade enorme de dados gerados por esse processo.
- DWT pode ser gerada por uma mudança pequena na CWT

Ligação com CWT

- Justificativa:
  1. Dificuldade e custo computacional de calcular os coeficientes de wavelet contínua em todos os possívies escalas
  2. A quantidade enorme de dados gerados por esse processo.
- DWT pode ser gerada por uma mudança pequena na CWT

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Ligação com CWT

- Justificativa:
  1. Dificuldade e custo computacional de calcular os coeficientes de wavelet contínua em todos os possívies escalas
  2. A quantidade enorme de dados gerados por esse processo.
- DWT pode ser gerada por uma mudança pequena na CWT

  $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \Rightarrow$

Ligação com CWT

- Justificativa:
  1. Dificuldade e custo computacional de calcular os coeficientes de wavelet contínua em todos os possívies escalas
  2. A quantidade enorme de dados gerados por esse processo.
- DWT pode ser gerada por uma mudança pequena na CWT

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \Rightarrow \psi_{j,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{(|a_0|)}}\psi\left(\frac{x-kb_0}{a_0^j}\right)$$

Ligação com CWT

- Justificativa:
  1. Dificuldade e custo computacional de calcular os coeficientes de wavelet contínua em todos os possívies escalas
  2. A quantidade enorme de dados gerados por esse processo.
- DWT pode ser gerada por uma mudança pequena na CWT

  $$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \Rightarrow \psi_{j,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{(|a_0|)}}\psi\left(\frac{x-kb_0}{a_0^j}\right)$$

  k e j inteiros, $a_0 > 1$ é um parámetro de dilatação fixo e b_0 um parámetro de translação

Ligação com CWT

- Justificativa:
  1. Dificuldade e custo computacional de calcular os coeficientes de wavelet contínua em todos os possívies escalas
  2. A quantidade enorme de dados gerados por esse processo.
- DWT pode ser gerada por uma mudança pequena na CWT
  $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \Rightarrow \psi_{j,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{(|a_0|)}}\psi\left(\frac{x-kb_0}{a_0^j}\right)$
  k e j inteiros, $a_0 > 1$ é um parámetro de dilatação fixo e b_0 um parámetro de translação

Geralmente, $a_0 = 2$ e $b_0 = 1$

Ligação com CWT

- Justificativa:
  1. Dificuldade e custo computacional de calcular os coeficientes de wavelet contínua em todos os possívies escalas
  2. A quantidade enorme de dados gerados por esse processo.
- DWT pode ser gerada por uma mudança pequena na CWT

  $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \Rightarrow \psi_{j,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{(|a_0|)}}\psi\left(\frac{x-kb_0}{a_0^j}\right)$

  k e j inteiros, $a_0 > 1$ é um parámetro de dilatação fixo e b_0 um parámetro de translação

Geralmente, $a_0 = 2$ e $b_0 = 1 \Rightarrow$

Ligação com CWT

- Justificativa:
  1. Dificuldade e custo computacional de calcular os coeficientes de wavelet contínua em todos os possívies escalas
  2. A quantidade enorme de dados gerados por esse processo.
- DWT pode ser gerada por uma mudança pequena na CWT
  $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \Rightarrow \psi_{j,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{(|a_0|)}}\psi\left(\frac{x-kb_0}{a_0^j}\right)$
  k e j inteiros, $a_0 > 1$ é um parámetro de dilatação fixo e b_0 um parámetro de translação

Geralmente, $a_0 = 2$ e $b_0 = 1 \Rightarrow DWT : \psi_{j,k}(x) = 2^{1/2}\psi(2^j x - k)$.

Algorítimo de Mallat

Algorítimo de Mallat (1989), da MRA, para DWT

Algorítimo de Mallat

Algorítimo de Mallat (1989), da MRA, para DWT

- Revolucionou alnalise de wavelet (implementação usando Filtros de Codificação em Sub-bandas) para calculo dos coeficientes de DWT produzindo FDWT.

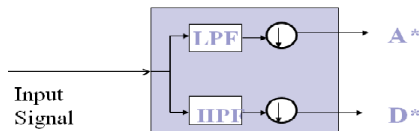
Algorítimo de Mallat

Algorítimo de Mallat (1989), da MRA, para DWT

- Revolucionou alnalise de wavelet (implementação usando Filtros de Codificação em Sub-bandas) para calculo dos coeficientes de DWT produzindo FDWT.
- Esse tipo de filtros é rojetado para quebrar o espectro do sinal em duas componentes.

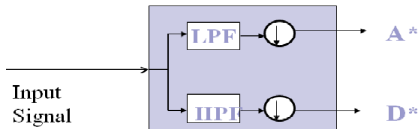
Algorítimo de Mallat

Algorítimo de Mallat (1989), da MRA, para DWT

- Revolucionou alnalise de wavelet (implementação usando Filtros de Codificação em Sub-bandas) para calculo dos coeficientes de DWT produzindo FDWT.
- Esse tipo de filtros é rojetado para quebrar o espectro do sinal em duas componentes.

1. Aproximação: componentes de baixa frequência (passando o sinal pelo filtro Passa baixa, LPF) que fornece uma visão global destas frequências.

Algorítimo de Mallat

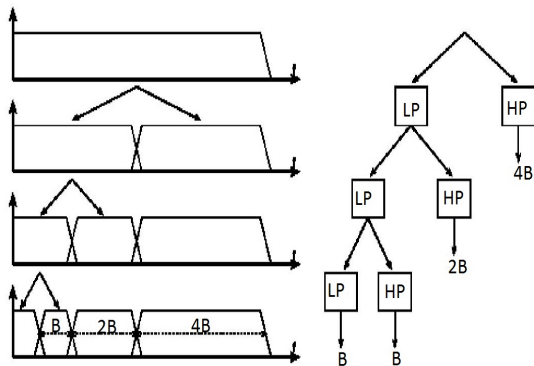
Algorítimo de Mallat (1989), da MRA, para DWT

- Revolucionou alnalise de wavelet (implementação usando Filtros de Codificação em Sub-bandas) para calculo dos coeficientes de DWT produzindo FDWT.
- Esse tipo de filtros é rojetado para quebrar o espectro do sinal em duas componentes.

1. Aproximação: componentes de baixa frequência (passando o sinal pelo filtro Passa baixa, LPF) que fornece uma visão global destas frequências.
2. Detalhe: componentes de alta frequência (passando o sinal pelo filtro Passa Alta, HPF) que fornece as informações dos mínimos detalhes.

Algorítimo de Mallat

Esse processo produz o dobro dos dados. Para corrigir, a saída de cada fíltro é decimada (sub amostrado por 2). Essa sob amostragem altera a escala, enquanto a resolução e alterada pela filtragem (metade das frequências do sinal é eliminada).

Algorítimo de Mallat

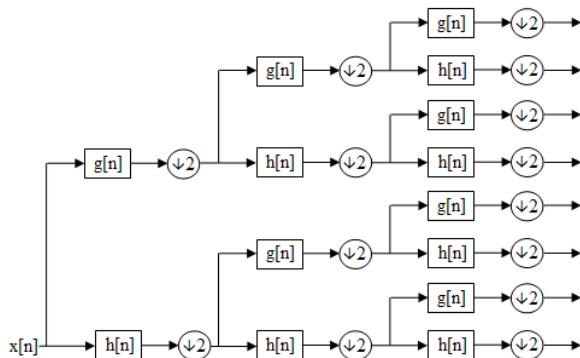
Esse processo produz o dobro dos dados. Para corrigir, a saída de cada fíltro é decimada (sub amostrado por 2). Essa sob amostragem altera a escala, enquanto a resolução e alterada pela filtragem (metade das frequências do sinal é eliminada).

A base de transformação de wavelet

- A DWT emprega dois tipos de funções chamadas de funçoes ”escala”e funções ”wavelet”que são associadas com os LPFs e HPFs, respectivamente.

A base de transformação de wavelet

- A DWT emprega dois tipos de funções chamadas de funçoes ”escala”e funções ”wavelet”que são associadas com os LPFs e HPFs, respectivamente.
- A decomposição do sinal em bandas diferentes é obtido pela filtragem sucessiva do sinal.

A base de transformação de wavelet

- A DWT emprega dois tipos de funções chamadas de funçoes ”escala”e funções ”wavelet”que são associadas com os LPFs e HPFs, respectivamente.
- A decomposição do sinal em bandas diferentes é obtido pela filtragem sucessiva do sinal.

- Os coeficientes de escala e coeficientes de detalhe podem ser calculados a partir de um sistema wavelet ortogonal através das relações:

- Os coeficientes de escala e coeficientes de detalhe podem ser calculados a partir de um sistema wavelet ortogonal através das relações:

$$h[n] = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\varphi(2t - n)dt$$

$$g[n] = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\varphi(2t - n)dt$$

- Os coeficientes de escala e coeficientes de detalhe podem ser calculados a partir de um sistema wavelet ortogonal através das relações:

$$h[n] = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \varphi(2t - n) dt$$

$$g[n] = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \varphi(2t - n) dt$$

- Todas as famílias de wavelets de suporte compacto com um dado comprimento do vetor de coeficientes de escala podem ser geradas a partir de uma expressão geral: a parametrização de Pollen-Wells.

- Os coeficientes de escala e coeficientes de detalhe podem ser calculados a partir de um sistema wavelet ortogonal através das relações:

$$h[n] = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\varphi(2t-n)dt$$
$$g[n] = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\varphi(2t-n)dt$$

- Todas as famílias de wavelets de suporte compacto com um dado comprimento do vetor de coeficientes de escala podem ser geradas a partir de uma expressão geral: a parametrização de Pollen-Wells.
- Exemplo: Prara o sistema de Haar Wavelet

- Os coeficientes de escala e coeficientes de detalhe podem ser calculados a partir de um sistema wavelet ortogonal através das relações:

$$h[n] = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\varphi(2t - n)dt$$

$$g[n] = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\varphi(2t - n)dt$$

- Todas as famílias de wavelets de suporte compacto com um dado comprimento do vetor de coeficientes de escala podem ser geradas a partir de uma expressão geral: a parametrização de Pollen-Wells.
- Exemplo: Prara o sistema de Haar Wavelet

$$HPF : g_l = \begin{cases} 2^{-1/2} & l = 0 \\ -2^{-1/2} & l = 1 \end{cases}$$

$$LPF : h_l = \begin{cases} 2^{-1/2} & l = 0 \\ 2^{-1/2} & l = 1 \end{cases}$$

Escolha de filtro

Relação entre o fíltro e o formato de wavelet

Escolha de filtro

Relação entre o fíltro e o formato de wavelet

- É importatnto escolher o fíltro certo

Escolha de filtro

Relação entre o fíltro e o formato de wavelet

- É importatnto escolher o fíltro certo
- A escolha do filtro determina o formato da função wavelet que vamos usar para a análise.

Escolha de filtro

Relação entre o fíltro e o formato de wavelet

- É importatnto escolher o fíltro certo
- A escolha do filtro determina o formato da função wavelet que vamos usar para a análise.
- O tamanho do filtro é o dobro do número dos momentos nulos da função wavelet, e este tem que ser maior que o grau do polinómio que sera aproximado (transformado pela wavelet)

Filtros de algumas famílias de funções (bases) wavelet:

Escolha de filtro

Relação entre o fíltro e o formato de wavelet

- É importatnto escolher o fíltro certo
- A escolha do filtro determina o formato da função wavelet que vamos usar para a análise.
- O tamanho do filtro é o dobro do número dos momentos nulos da função wavelet, e este tem que ser maior que o grau do polinómio que sera aproximado (transformado pela wavelet)

Filtros de algumas famílias de funções (bases) wavelet:
http://wavelets.pybytes.com/

Síntese

- a reconstrução do sinal (síntese) é o processo em que junta-se de volta todas as componentes.

Síntese

- a reconstrução do sinal (síntese) é o processo em que junta-se de volta todas as componentes.
- Upsampling (interpolação) é o complemento de decimação e feito incerindo zero entre cada dois coeficientes.

Síntese

- a reconstrução do sinal (síntese) é o processo em que junta-se de volta todas as componentes.
- Upsampling (interpolação) é o complemento de decimação e feito incerindo zero entre cada dois coeficientes.
- A reconstrução perfeita do sinal exige uma base wavelet ortogonal.

Síntese

- a reconstrução do sinal (síntese) é o processo em que junta-se de volta todas as componentes.
- Upsampling (interpolação) é o complemento de decimação e feito incerindo zero entre cada dois coeficientes.
- A reconstrução perfeita do sinal exige uma base wavelet ortogonal.

Síntese

- a reconstrução do sinal (síntese) é o processo em que junta-se de volta todas as componentes.
- Upsampling (interpolação) é o complemento de decimação e feito incerindo zero entre cada dois coeficientes.
- A reconstrução perfeita do sinal exige uma base wavelet ortogonal.

Aproximação

Podemos reconstruir um sinal com um certo nível de aproximação de accordo com a seguinte formula:

Aproximação

Podemos reconstruir um sinal com um certo nível de aproximação de accordo com a seguinte formula:

$$f_{j+1}(x) = f_j(x) + \sum_{k=0}^{2^{j-1}} d_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

Aproximação

Podemos reconstruir um sinal com um certo nível de aproximação de accordo com a seguinte formula:

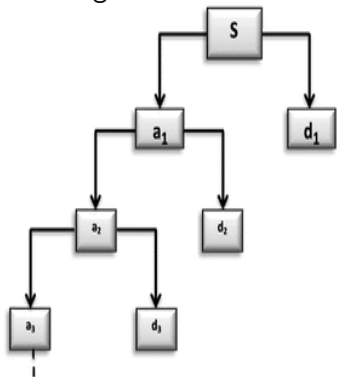
$$f_{j+1}(x) = f_j(x) + \sum_{k=0}^{2^{j-1}} d_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

E da seguinte forma:

Aproximação

Podemos reconstruir um sinal com um certo nível de aproximação de accordo com a seguinte formula:

$$f_{j+1}(x) = f_j(x) + \sum_{k=0}^{2^{j-1}} d_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

E da seguinte forma:

S = Original signal/time series data

a_i = Approximation-low frequency content

d_i = Detail-high frequency content

Level-1 decomposition

$S = a_1 + d_1$

Level-2 decomposition

$S = a_2 + d_2 + d_1$

Level-3 decomposition

$S = a_3 + d_3 + d_2 + d_1$

Exemplo

Exemplo de aproximação de um sinal usando DWT com base Haar (Nasion 2008):

Exemplo

Exemplo de aproximação de um sinal usando DWT com base Haar (Nasion 2008):
O sinal aproximado representa os dados de Pletismografia de indutância.

Exemplo

Exemplo de aproximação de um sinal usando DWT com base Haar (Nasion 2008):

O sinal aproximado representa os dados de Pletismografia de indutância.

A aproximação está feita em três níveies.

Exemplo

Exemplo de aproximação de um sinal usando DWT com base Haar (Nasion 2008):
O sinal aproximado representa os dados de Pletismografia de indutância.
A aproximação está feita em três níveies.

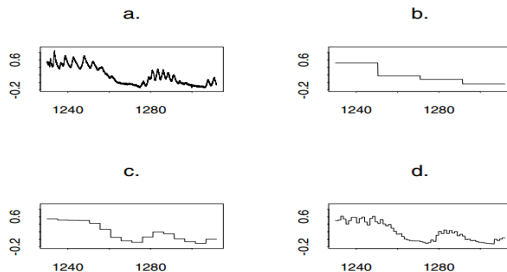



Figura 5: (a) Uma sessão de dados de inPletismografia de indutância (sinal original), (b) Aproximação no nível de resolução j=2, (c) Aproximação no nível j=4, (d) Aproximação no nível j=6

Aplicações de transformação de wavelet

Aplicações de transformação de wavelet

- Compressão de dados(Exemplo: JPEG2000)

Aplicações de transformação de wavelet

- Compressão de dados(Exemplo: JPEG2000)
- Suavização e eliminação de ruido (Thresholding/wavelet shrinkage).

Aplicações de transformação de wavelet

- Compressão de dados(Exemplo: JPEG2000)
- Suavização e eliminação de ruido (Thresholding/wavelet shrinkage).
- Telecomunicações

Aplicações de transformação de wavelet

- Compressão de dados(Exemplo: JPEG2000)
- Suavização e eliminação de ruido (Thresholding/wavelet shrinkage).
- Telecomunicações
- Representação de sinais.

Aplicações de transformação de wavelet

- Compressão de dados(Exemplo: JPEG2000)
- Suavização e eliminação de ruido (Thresholding/wavelet shrinkage).
- Telecomunicações
- Representação de sinais.
- Em geral, está substituindo a convencional transformação de Fourier em varias áreas.